解析几何

lin150117

目录

1 椭圆的性质 **2**

1.1 基础性质 2

1.2 补充 3

2 双曲线的性质 **4**

2.1 基础性质 4

3 抛物线的性质 **5**

4 解析几何基本解法 **6**

4.1 反思与总结 8

1 椭圆的性质

1.1 基础性质

性质 1. 已知：椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点为 F_1,F_2, $P(x_p,y_p)$ 为椭圆上一点，$\angle F_1PF_2=\theta$

(1) $\angle F_1PF_2$ 外角平分线的方程为 _

(2) 过 F_2 作 $\angle F_1PF_2$ 外角平分线的垂线，其垂足的轨迹方程为 _

(3) 以焦半径 PF_2 为直径的圆，与以椭圆长轴为直径的圆 _（位置关系）

设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 与 x 轴交于点 M, $\angle F_1PF_2$ 外角平分线 PN 与 x 轴交于点 N

(4) $x_M=$ _, $x_N=$ _, $|OM|\cdot|ON|=$ _

(5) 设 $\triangle PF_1F_2$ 的内心为 I, 则 $\dfrac{MI}{IP}=$ _
点 I 的坐标为（用 x_P,y_P 表示）_
点 I 的轨迹方程为 _

(6) PF_2 外旁心的轨迹方程为 _

(7) $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 _（用 a,b,θ 表示）

(8) $|OP|^2+|PF_1|\cdot|PF_2|=$ _

性质 2. $P(x_0,y_0)$ 为椭圆外一点，过 P 作切线切于 AB，则

(1) AB 的方程为 _

(2) 设 AB 的中点为 M，则 OMP 三点 _

(3) 若 OP 交椭圆于 Q，则 $\dfrac{x_Q^2}{x_Px_M}=$ _

(4) 若 $\angle APB=90^\circ$，则 P 点的轨迹方程为 _

(5) 若 F_1,F_2 为左右焦点，则 $\angle AF_1P$ ___ $\angle BF_1P$

性质 3. F 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点，l 为右准线, AB 为过 F 的弦, $\angle AFx=\theta$

(1) $|AF|=$ ___, $|BF|=$ ___, $|AB|=$ ___

(2) $\dfrac{1}{|AF|}+\dfrac{1}{|BF|}=$ _

(3) 若 l 上存在点 C，使得 $\triangle ABC$ 为正三角形，则离心率 e 的范围 _

(4) 求 AB 中点 M 的轨迹方程 _

(5) 设 $AA_1\perp l, BB_1\perp l$，若 AB_1 交 x 轴于点 N，则 N 的坐标为 _

设 A,B 处椭圆的切线分别为 l_A,l_B

(6) 设 l_A,l_B 交于点 D，则 D 的轨迹方程为 _

(7) $\angle AFD\_90^\circ$, $\angle ADB\_90$

性质 4. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 右焦点为 F，右准线为 l

(1) 弦 AB 延长交 l 于点 C, $\angle AFB$ 的外角平分线交 l 于点 D，则 $y_C\_y_D$

(2) 椭圆上点 E 的切线与 l 交于点 E，则 $\angle EFE_1=\_$

(3) A 为椭圆上一点，过 F 的弦交椭圆于 MN, AM 和 AN 分别交右准线于 P,Q, 则 $\angle PFQ=\_$

(4) 过 l 上一点 P 作椭圆的两条切线 PA,PB，则直线 AB 经过定点 _

(5) 设 AB,CD 为过焦点的两动弦，AC,BD 交于点 M，则 M 的轨迹方程为 _

性质 5. $P(x_0,y_0)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 内定点，$x_0\in(0,a)$, Q 在椭圆上，F 为右焦点，则

$$(c|PQ|+a|QF|)_{min}=\_\_\_$$
$$|PQ|+|QF|\in\_\_\_$$

性质 6. (1) M 为 $x=x_M$ 上一动点, A_1,A_2 为左右顶点, A_1M,A_2M 交椭圆于 S,T，ST 交 x 轴于 N，则 $x_M\cdot x_N=\_$

(2) 过 $P(x_P,0)$ 作直线交 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 于 AB，椭圆左右顶点为 M,N, AM,BN 交于点 R, 则 $x_P\cdot x_R=\_$

(3) 过 $P(x_P,0)$ 作直线交 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 于 AB, B 关于 x 轴的对称点为 B_1, AB_1 交 x 轴于 Q，则 $x_P\cdot x_Q=\_$

(4) 过 $P(x_P,0)$ 作两条直线交 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 于 AB,CD，直线 AC,BD 交于点 S，则 $x_P\cdot x_S=\_$

评论 1. 可以看见，这里的 Q,R,S 均在同一条直线 $x=\dfrac{a^2}{x_P}$ 上。看看它的特殊情况是什么！

性质 7. P 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一点, A,B 为左右顶点, F_1,F_2 为左右焦点, PF_1,PF_2 交椭圆于 M,N，则

(1) $k_{AP}\cdot k_{PB}=\_$ *(椭圆第三定义)*

(2) $k_{AP}\cdot k_{AM}=\_$

(3) 若 AM,BN 交于 Q，则 Q 点的方程为 _

性质 8. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上两点 A,B 满足: $OA\perp OB$

(1) $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\_$

(2) 设 $OM\perp AB$ 于点 M，则 M 的轨迹方程为 _

1.2 补充

例子 1.1. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 有两点距离为 $m(\dfrac{2b^2}{a}<m<2a)$，试求他们的中点到 y 轴的距离最大值

例子 1.2. 椭圆上的点 A 作两条倾斜角互补的直线与椭圆交于 BC，设过 A 的切线为 l，设直线 l 与直线 BC 的斜率分别为 k_l 和 k_{BC}，求证: $k_l=-k_{BC}$

例子 1.3. 过椭圆内一点 A 作两条倾斜角互补的直线，与椭圆交于 BC,DE，设直线 BD 和直线 CE 的斜率分别为 k_{BD},k_{CE}，求证: $k_{BD}+k_{CE}=0$

例子 1.4. 设 A,B 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左右顶点。点 $M(x_0,y_0)$ 为 x 轴上方椭圆上一点，已知 $\angle AMB=\gamma$，求三角形 AMB 的面积

2 双曲线的性质

2.1 基础性质

性质 9. 已知：双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点为 F_1,F_2, $P(x_0,y_0)$ 为椭圆上一点，$\angle F_1PF_2=\theta$

(1) $|PF_1|=$___, $|PF_2|=$___（用 x_0,y_0 表示）

(2) $\angle F_1PF_2$ 角平分线的方程为 _

(3) 过 F_1 作 $\angle F_1PF_2$ 角平分线的垂线，其垂足的轨迹方程为 _

(4) 以焦半径 PF_2 为直径的圆，与以实轴为直径的圆 _（位置关系）

设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 与 x 轴交于点 M, $\angle F_1PF_2$ 外角平分线 PN 与 x 轴交于点 N

(4) $x_M=$_, $x_N=$_, $|OM|\cdot|ON|=$_

(5) 设 $\triangle PF_1F_2$ 的内心为 I, 则点 I 的轨迹方程为 _

(6) $\triangle F_1PF_2$ 中 PF_2 所对外旁心的轨迹方程为 _

(7) $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 _（用 a,b,θ 表示）

(8) $|PF_1|\cdot|PF_2|-|OP|^2=$_

评论 2. 双曲线和椭圆性质类似，对比一下即知。角平分线由于有到两边距离相同的性质以及内切圆的边长性质，和椭圆和双曲线的第一定义有一定联系，故有如上性质。

性质 10. $P(x_0,y_0)$ 为双曲线外一点，过 P 作切线切于 AB，则

(1) AB 的方程为 _

(2) 设 AB 的中点为 M，则 OMP 三点 _

(3) 若 $\angle APB=90^\circ$，则 P 点的轨迹方程为 _

(4) 若 F_1,F_2 为左右焦点，则 $\angle AF_1P$___$\angle BF_1P$

(5) 设双曲线左右顶点为 M,N, AM,BN 相交于点 Q，则 $x_Q=$_

性质 11. F 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点，l 为右准线, AB 为过 F 的弦, 倾斜角为 θ

(1) $|AF|=$___, $|BF|=$___, $|AB|=$___

(2) A,B 在双曲线同一支上时，θ 的范围 _
A,B 在双曲线不同支时，θ 的范围 _

(3) 求 AB 中点 M 的轨迹方程 _

(4) 设 $AA_1\perp l, BB_1\perp l$，若 AB_1 交 x 轴于点 N，则 N 的坐标为 _

设 A,B 处双曲线的切线分别为 l_A,l_B

(6) 设 l_A, l_B 交于点 D，则 D 的轨迹方程为 _, $\angle AFD$_$90°$

(7) 设左右顶点分别为 C, D，则 $k_{AC} \cdot k_{AD} =$ _, $k_{DA} \cdot k_{DB} =$

性质 12. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线为 l_1, l_2，右焦点为 F

(1) 过 F 作 $FH \perp l_1$，则 $x_H =$ ___ $y_H =$ ___

若 FH 与左右两支各有一个交点 B, A，则 $e \in$ ___

若 $\vec{BH} = \lambda \vec{HA}$，则 $e =$ ___

(2) 直线 l 与双曲线, l_1, l_2 的交点依次为 A, B, C, D，则 $\dfrac{|AD|}{|BC|} =$ ___

性质 13. 设双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 F，右准线为 l

(1) 直线 AB 交双曲线的右支分别于 A, B，交 l 于 M, $\angle BAF = \alpha, \angle ABF = \beta$，则 $\angle AMF =$ _

(2) 直线 AB 交双曲线的左右两支分别于 A, B，交 l 于 M, $\angle BAF = \alpha, \angle ABF = \beta$，则 $\angle AMF =$ _

(3) 以 F 为圆心做半圆交左右两支分别于 A, B，设 C 为双曲线左顶点，记 $\angle AFC = \alpha, \angle BFC = \beta$，则 $\cos\beta - \cos\alpha =$ ___

3 抛物线的性质

性质 14. 抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点为 F，准线为 l, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是抛物线上的点 $AA_1 \perp l$ 于 A_1, $\angle A_1AF, \angle B_1BF$ 的平分线分别为 l_a, l_b

(1) 求 l_a 的方程 _

(2) 设 l_a 与 y 轴交于点 M，则 $y_M =$ ___，A_1, M, F 三点 ___，以焦半径为直径的圆与 y 轴 ___

(3) AB 的方程为 ___（用 y_1, y_2 表示）它与 l_a 方程有什么联系 ___

(4) 设 l_a, l_b 交于点 C，则 $x_C =$ ___, $y_C =$ ___

设 C' 在抛物线上，过 C' 的切线与 AB 平行，则 $y_{C'} =$ ___

设 C'' 在抛物线上, $y_A < y_C < y_B$，当 C'' 到 AB 距离最大时, $y_{C''} =$ ___

性质 15. 抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过 F 的直线交抛物线于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，AB 倾斜角为 θ

(1) $x_1x_2 =$ ___, $y_1y_2 =$ ___, $|AB| =$ ___（用 θ 表示）$|A_1OB$ 三点 ___

(2) $\angle A_1FB_1 =$ ___

设 M_1 为 A_1B_1 中点，则 $\angle AM_1B =$ ___

以 AB 为直径的圆与 l 相切

(3) l 与 x 轴交于 F_1，则 $\angle AF_1F$ ___ $\angle BF_1F$

(4) 若 $S_{\triangle AA_1F} \cdot S_{\triangle BB_1F} = \lambda S^2_{\triangle AF_1B}$，则 $\lambda =$ ___

(5) $M_1F^2 = k|AF| \cdot |BF|$, $k =$ ___

(6) AB 中点 M 的轨迹方程为 ___

评论 3. 抛物线在保有类似双曲线和椭圆的一些性质外还独有一些性质。这是因为抛物线计算上相对简单，因此许多量都可以直接表示，这里建议把直接可以表示的量尽量记住，抛物线的性质是最有可能用到的。

性质 16. P 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 外一点，过点 P 作切线切于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

(1) $x_P=$ ___, $y_P=$ ___（用 A,B 坐标表示）

(2) 设 P 坐标为 (x_0,y_0)，则 A,B 方程为 ___
当 P 在准线上时, AB 经过定点 ___

(3) $|PF|^2$___$|AF|\cdot|BF|$

(4) $\angle AFP$___$\angle BFP$

性质 17. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 作 $l_1\perp l_2$ 交抛物线于 A,B,C,D

1. 若 AB,CD 的中点为 M,N，则 MN 经过定点 ___

2. 若以 AB,CD 为直径的圆的公共线中点为 Q，则 Q 的轨迹方程为 ___

性质 18. 设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 顶点为 O，弦 AB 与 x 轴交于点 M

1. 若 $AO\perp BO$，$x_M=$ ___
过 O 作弦 AB 的垂线，垂足为 H，则 H 的轨迹方程为 ___

2. 若 M 为定点 $(m,0)$, $k_{OA}\cdot k_{OB}=$ ___
设 $N(-m,0)$ 是 M 关于原点的对称点，则 $\angle ANM$___$\angle BNM$
过 N 的两条倾斜角互补的直线与抛物线分别交于 A_1,A_2,B_1,B_2，则 A_1B_2 必经过定点 ___

3. 设 $P(x_0,y_0)$ 为抛物线上一点，且 $PA\perp PB$，则 AB 必经过定点 ___

4. 抛物线上动点 Q 满足: $QA\perp QB,|QA|=|QB|$，则 $S_{\triangle QBA}$ 的最小值为 ___

性质 19. $\triangle ABC$ 顶点在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上

1. 若 $\triangle ABC$ 为等边三角形，则重心的轨迹方程为 ___

2. 抛物线在这三点的切线围成的三角形的垂心的横坐标 ___

4 解析几何基本解法

限于笔者水平，若有不当或情况未列出请指正!
解析几何关键要看思路的流畅性，即计算对象的不断变化，我们在以下题型中重点放在计算顺序上。通常的计算顺序都是两边凑，我们要时刻对“什么东西已经可以表示“保持警惕。建议把计算顺序在写完题后特别是不会的总结一下，非常推荐，这让你能理解更深一点解析几何的计算逻辑

定点定直线问题 总体而言，我们要去思考如何证明一条直线过顶点或一个点一定在一条直线上，以下是一些解决方式。笔者希望读者能从中理解"两边凑的思想"。

（一）直接猜：考虑一下 x 轴和 y 上的点，平行于 x,y 轴的直线是否符合条件

例子 4.1. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$，过点 $P(0,1)$ 的动直线 l 与椭圆交于 A,B 两点，点 B 关于 y 轴的对称点为点 D (不同于点 A)，证明：直线 AD 恒过顶点，并求出该点坐标。

评论 4. 对称永远是数学的主题。一方面解析几何的一些对称性质大多还是需要一定经验的，但另一方面由 x 轴开始，由 x/y 轴结束是非常自然的，因为从坐标轴出发的往往计算上会简单一点，以及我们有很多表示法，过 x 轴上一点的直线是表示上是很简单的。

这里，P 在 y 轴上，根据对称性，我们让 l 分别为两条对称的直线，那么定点只能是两个 AD 相交而得，所以一定在 y 轴上。

（二）慎重考虑设出的对象，不一定是问题中第一条引出的直线，也可以是问题中间的直线

例子 4.2. 已知椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{3y^2}{4}=1$。其左顶点为点 A，动点 B,C 在椭圆上，且 $AB\perp AC$，求证：直线 BC 恒过一定点。

例子 4.3. 已知抛物线 $x^2=4y$ 上一点 $N(2,1)$。动点 A,B 在椭圆上，且 $NB\perp NA$，求证：直线 AB 恒过一定点。

例子 4.4. 已知椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$。点 $P(0,1)$，设直线 l 不经过 P 点不垂直于 x 轴，且与 C 相交于 A,B 两点。若直线 PA,PB 的斜率的和为 -1，求证：直线 l 过定点。

例子 4.5. 从双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 上一点 $A(4,\sqrt{3})$ 引两条直线 AM,AN，分别交 C 于 M,N, 且 AM,AN 的斜率为 k_1,k_2，满足 $k_1\cdot k_2=1$，判断直线 MN 是否过定点。

评论 5. 这里就是解析几何思想的非常关键的东西：设出的对象是什么。我们肯定要确保未知字母的个数尽量不超过 3, 然而我们不能死脑筋，一定要以全题审视的视角看看把哪一个点，哪一条直线用未知数表示出来。当然，经验上谈一般就是设开头引出的直线或者最后问的直线。我们这道题就是设出最后的一条直线，这在此类问题中非常常见。其原因是：一条直线 $y=mx+n$ 过顶点就是在问 m,n 的关系是什么，那么我们设出这条直线，去对照什么样的 m,n 可以符合条件中做的一系列点。

（三）发现特点，利用几何性质

例子 4.6. 设 F_1,F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{1-a^2}=1$ 的左右焦点，点 P 为椭圆 E 上的第一象限内的点，直线 F_2P 交 y 轴于点 Q，并且 $PF_1\perp F_1Q$。证明：当 a 变化时，点 P 在某定直线上

例子 4.7. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$，过点 $M(0,-1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点。试判断 AB 直线的圆是否恒过定点，并说明理由。

评论 6. 思考从哪里入手，入手点和思路都是很重要的需要积累的经验。

定值问题 类似上述方法，定点问题和定值问题几乎是一样的，关键是对我们如何去设参数的考量。下面介绍一下点差法的运用。

例子 4.8. 已知椭圆 $C:9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M，证明：直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值。

例子 4.9 (2020 浙江 21)**.** 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，抛物线 $C_2:y^2=2px(p>0)$，点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点，过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B，交抛物线 C_2 于点 M（B,M 不同于 $A1$）若存在 l 使 M 为线段 AB 的中点，求 p 的最大值。

评论 7. 这里有一种全新的思想：设点。我们可以称之为点参。事实上，回顾一下我们之前的思路，无非就是设出一条直线 $y=kx+b$ （但这条直线需要仔细琢磨）然后再设点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 用韦达定理建立起 x_1,x_2 与 k,b 的联系，之后再回答问题。这称之为线参。其实就是把参数的重点放在点上还是线上，即用点的坐标表示线还是用线的方程表示点（当然线的方程不能直接表示点，但不妨我们将韦达定理作为一种表示形式。不得不说，由于美妙的对称性，一般不太可能出现超出韦达定理的情况）
点参和线参需要按照实际情况来使用，也需要结合一定的逻辑。例如本题中，很明显直线的作用仅仅只是把两点表示出来，而其实先点出两点再连这条线也是没有任何问题的，因此完全可以将线隐去，利用点满足的方程进行一定的操作。这同时也体现出一个思想：曲线上的点适合曲线的方程，且两者是等价关系。那么我们只要对两点的方程进行对照，消消乐即可（笔者还没有想出超出相减的做法）
回到点差法的思想，基本上用于弦上的定比分点（多为中点）通过构建两条方程乘以系数作差以消去某些项。因此，点差法的关键是能不能消去一些没有用的，如常数项。

4.1 反思与总结

注意事项 一、一些特殊情况，如斜率不存在，仅有唯一交点等。
二、注意左支右支导致的多种情况，焦点位置（可能方程不是标准方程而在 y 轴）引来结果多样
三、多注意对称性以及“地位”上的平等（例如一条直线交曲线两个点，那这两个点地位就是平等的）

基本手法 点差法、平移坐标轴（对仅有斜率、边比的问题能简便运算，关键是选取原点使点利于计算）、齐次化（化简得到 $f(x,y)=1$ 后齐次化解出 $\dfrac{y}{x}$，一般在平移后用）、参数方程（相当于三角换元，能将一些结构变得简单）

处理思想 一、换角度看问题：如何用简洁好用的算式表达一个条件，这需要我们多元的看待一个对象。
二、合理安排计算顺序：从哪里计算很重要，是点参还是线参，用点表示线还是用线通过韦达定理表达交点。做题不能死板，既可以用已知量去表示一个量，也可以设出这个量列得有关方程。
三、倒推思想：先设最后得到的反推初始状态，可以列得方程。
四、方程思想：在原本方程式上进行代数变形，如点差法

小结 解析几何是计算的艺术，第一点的误区是不能把解析几何看成非常多的技巧的组合，至少以上的内容涉及了几乎所有“在考场上想不到的人方法”，因此，熟练的计算代数式是要练就的功底。当然经验也很重要，你需要知道什么样的东西大概是能解出来的。如果做多了，很容易发现，有根号的东西往往不以加法形式存在，往往会保留到最后几步自然消去。三次及以上的方程几乎都能因式分解，一般的式子就是形如 $x-y$ 的对称式或者一次式。
限于笔者水平，一些方法还没有面面俱到，但笔者认为数学思想比方法更为重要，关注重点，找到联系，从熟悉的地方出发逐个攻破就是很好的思想。正如我所说，想不到的方法我已经列在上面了，剩下的关键在能不能发现。一定的积累是非常必要的，笔者推荐有一本笔记本，专门记你觉得的好题，但关键不是记录题目，而是记录你的思考，读者可以在题下面写关于入手点，思想方法，思维逻辑，数学对象之间的联系，关注点，重点等等，或许笔者上面对一些题的评语会对你有帮助。笔者一直认为，每个人的思维不同，因此关注点不同会导致差距，这也就是不同人擅长不同东西的原因。但是我们要汲取别人以及答案的思维方式，重点要关注他们是怎么审视这道题的。具体的操作就有读者自行斟酌了。

任何东西都可以记，为的其实是让自己记住。人类忽视了很多很多的细节，我们要做的就是重新审视，从旧的中获得新的。这也是我们汲取经验的方式。