数列

lin150117

March 2023

目录

1 数列注意事项

1. 下标不要弄错，注意递推式中下标的取值（a_1 就未必符合递推式）
2. 不要漏项缺项
3. 等比各项不为零，常数列也是等比数列但求和式要单独讨论
4. 其他注意事项

2 数列通项

递推法 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ $a_{n+1} = a_n \times f(n)$ 这两条又称累加累乘法，但递推法可以为两种的叠加

注意，基本上所有的方法最终都需要递推求解，意思是最终目标是将数列化作 $f(a_n)$ 的形式运用递推法

待定系数法 一阶线性递推式 $a_{n+1} = pa_n + q$ 可以如下求解

$$a_{n+1} - \lambda = p(a_n - \lambda) \quad \Rightarrow \lambda = \frac{q}{1-p} \tag{1}$$

一些类似的递推式也可以类似求解，如 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$

$$a_{n+1} + g(n+1) = p(a_n + g(n)) \tag{2}$$

显然在 f(n) 为多项式时该方程应该有解, 当然该递推式也可以用递推法暴力解

对于二阶线性方程及分式方程的思路是一样的

二阶线性方程

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \Rightarrow a_{n+2} + \lambda a_{n+1} = (p+\lambda)(a_{n+1} + \lambda a_n \tag{3}$$

分式方程

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + t} \tag{4}$$

尝试去找 λ 使得

$$a_{n+1} - \lambda = \frac{p(a_n - \lambda)}{ra_n + t}$$

当然仅仅这么做还是比较麻烦，但是以上两种我们可以解出两个 λ ，可以通过比值再求解

某些二次递推式也可以如此求解

$$an+1 = pa_n^2 + qa_n + r \Rightarrow a_{n+1} = p(a_n+t)^2$$

example 2.1. $a_{n+1} = \frac{a_n^2+p}{2a_n+q}$

变形转换法 有时候必须用 $b_n = f(a_n)$ 的转换再进行递推，如

$$a_{n+1} = pa_n + q^n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{q^{n+1}} = \frac{p}{q} \times \frac{a_n}{q^n} + \frac{1}{q} \tag{5}$$

把 a_n 通过乘除转换为简单的 $a_n f(n)$ 是常用的方法，也可以这么处理

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{q^n}{p^n}$$

事实上将 q^n 转化为一般的 f(a_n) 依然有效

取倒数的方法，对 $a_{n+1} = a_n + pa_n a_n n + 1 \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - p$

取倒数的办法在数列不等式方面也经常遇到

取对数的办法，对 $a_{n+1} = pa_n^q$ 可取对数再递推

整体比较法 通过前后两项的比较得到相关递推式，一般相减前后两项 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ f(n) 是多项式，那么不断两项相减，我们可以得到 k 阶线性递推式

$$a_{n+k} = p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \ldots + p_k a_n \tag{6}$$

example 二阶线性递推式的等价表达形式

$$a_{n+1} = \frac{a_{n^2} + t}{a_{n-1}}$$

$$a_{n+1} = 3a_n + 2\sqrt{2a_{n^2} - 1}$$

数学归纳法 从一般结构猜测即可

不动点法 若 $a_{n+1} = f(a_n)$ 考虑方程 $f(x) = x$ 的根 α ，那么 $f(a_n) - \alpha$ 应有因式 $a_n - \alpha$ 类似上文处理

换元法 根号换元

$$a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}, a_1 = 1 \tag{7}$$

特殊换元（含三角换元）

example 2.2. $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$

example 2.3. $a_0 = 1 \quad a_n = \frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}$

周期数列 如 $a_{n+1} = \frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1} \quad a_1 = 1$ 是周期数列的原因极大可能是解出的特征根为复数

3 数列求和

数列求和本质上和求通项基本一致，但有一些方法是特别的（但也很套路）

倒序相加 Gauss sum(

错位相减 $a_n = b_n \times c_n$ b_n 是等差数列，c_n 是等比数列

remark 3.1. *Abel 恒等式*:$\sum_{i=1}^n a_n b_n = \sum_{i=1}^{n-1}(\sum_{j=1}^i a_i)(b_n - b_{n+1}) + b_n \sum_{i=1}^n a_i$

裂项相消 注意一下几点即可：

1.$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \frac{1}{n(1-n)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{1-n}$
2.$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
3.$n(n+1)\cdots(n+k-1) = \frac{1}{k}[n(n+1)\cdots(n+k) - (n-1)n\cdots(n+k-1)]$
$n \cdot n! = (n+1)! - n!$
4.$\frac{2^n}{2^{2n+1}-3\times 2^n+1} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$
5.$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. 其他可以通过变形获得的裂项

作差法 可以类比数列通项中的整体比较法

周期数列

4 简单数列不等式

不等式的出现完全是因为我们无法用等式去描述，即很多数列我们无法求得通项，但是我们可以仿照求通项的办法给出一个估计

简单的不等式可以考虑迭代的方法，即直接找有关 a_n, a_{n+1} 两项的不等式递推

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \quad a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

tips. 平方,取倒数,错项相减,换元,分式放缩以裂项求和,关键在放缩成我们熟悉的可以求和的部分

exercise 1.$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, a_1 = 1$ 求 $[a_{17}]$

2.$a_{n+1} = a_n - a_n^2, \frac{1}{2} < a_1 < 1$ 给出 a_{17} 的一定范围